**Мартингалы: начальные сведения**

Пусть имеется полное вероятностное пространство и неубывающее семейство σ-подалгебр . Вспомним, что последовательность пар называется *стохастической последовательностью*, если для любого *n* случайная величина *Xn*  является -измеримой.

**Определение 1**. Стохастическая последовательность X называется *мартингалом*, если для любого и

Если для стохастической последовательности вместо равенств (1) выполняются неравенства

то последовательность называется *субмартингалом*, а если последовательность неравенств

то *супермартингалом*.

**Замечание 1.** Если – супермартингал, то Y – субмартингал. Поэтому достаточно изучать только субмартингалы.

**Пример 1 (аддитивный мартингал)**. Пусть - последовательность независимых случайных величин с Рассмотрим неубывающую последовательность σ-подалгебр, порожденную последовательностью а также новую последовательность *Xn*, являющуюся суммой с нарастающим пределом:

Доказать, что – мартингал.

**Решение**

Из (4) следует, что является -измеримой случайной величиной, т.е. действительно является стохастической последовательностью. Из условия задачи также следует, что является интегрируемой случайной величиной. Далее, (4) может быть записано в рекуррентной форме (это стандартный прием при решении задач подобного типа):

Проверим выполнение мартингального свойства (1), используя свойства условного математического ожидания и условие задачи:

Мартингальное свойство доказано.

**Пример 2 (мультипликативный мартингал)**. Пусть - последовательность независимых случайных величин с Рассмотрим неубывающую последовательность σ-подалгебр, порожденную последовательностью а также новую последовательность *Xn*, являющуюся суммой с нарастающим пределом:

Доказать, что – мартингал.

**Решение**

Из (5) следует, что является -измеримой случайной величиной, т.е. действительно является стохастической последовательностью. Из условия задачи также следует, что является интегрируемой случайной величиной. Далее, (5) может быть записано в рекуррентной форме (это стандартный прием при решении задач подобного типа):

Проверим выполнение мартингального свойства (1), используя свойства условного математического ожидания и условие задачи:

Мартингальное свойство доказано.

**Пример 3 (для самостоятельного решения).** Пусть *X* – случайная величина, , и - некоторая неубывающая последовательность σ-подалгебр. Последовательность случайных величин строится следующим образом:

Доказать, что – мартингал.

**Определение 2.** Стохастическая последовательность называется *мартингал-разностью*, если

**Замечание 2**. Если – мартингал, то – его мартингал-разность. Между мартингалами, стартующими из 0, и мартингал-разностями существует взаимно-однозначное соответствие. Частный случай построения мартингала с помощью мартингал-разности описан в Примере 1.

**Определение 3.** Если – стохастическая последовательность некоррелированных случайных величин , то она также носит название (нестационарного нецентрированного) *дискретного белого шума*.

**Определение 4.** Пусть – некоторая стохастическая последовательность, и . Если является – измеримой случайной величиной, то такую стохастическую последовательность называют *предсказуемой*.

**Некоторые свойства мартингалов и субмартингалов (проверить самостоятельно)**

1. Если *X* – мартингал, то

Аналогично и для свойств (2), (3) для супер- и субмартингалов.

1. Если *X* – мартингал, то

Если *X* – субмартингал, то

1. Если *X* – мартингал и *выпуклая* функция *g=g(x)* такова, что то стохастическая последовательность является субмартингалом. Доказательство опирается на использование неравенства Йенсена.
2. Если – мартингал-разность, то
3. Если – мартингал-разность с конечным вторым моментом, то это – дискретный белый шум.

**Доказательство свойства 5**:

Проверим некоррелированность и при , используя свойства условного математического ожидания:

Некоррелированность доказана.

**Пример 4** **(для самостоятельного решения)**. Пусть – матрингал-разность, а – некоторая предсказуемая последовательность. Доказать, что также будет мартингал-разностью. В предположении, что , найти интенсивность белого шума

**Замечание 3**. Мартингал-разность можно рассматривать как некоторое обобщение дискретного белого шума, который играет важную роль в построении стохастических динамических систем с дискретным временем. Дискретный белый шум уже встречался в курсе «Теория случайных процессов» при определении процессов авторегрессии (*AR(p)*-процессов)

процессов скользящего среднего (*MA(p)*-процессов)

а также процессов авторегрессии / скользящего среднего (*ARMA(p,q)*-процессов)

Процессы (8)-(10) представляют собой *линейные* преобразования дискретного белого шума. Вообще, в прикладных задачах системного анализа в качестве модели часто выступает *нелинейная* векторная авторегрессия 1-го порядка:

Модель (11) часто возникает как результат приближенного решения стохастической дифференциальной системы методом Эйлера. Обычно в качестве процесса белого шума выступает стандартный *гауссовский* дискретный белый шум. Это значит, что сечения являются не только некоррелированными, но и вообще независимыми.

Ниже будет показано, что марковские цепи также могут быть представлены в виде линейных векторных авторегрессий 1-го порядка со специальными мартингал-разностями в правой части.

Ниже приведена теорема, описывающая структуру субмартингалов.

**Теорема 1 (разложение Дуба).** Пусть – субмартингал, тогда найдутся мартингал и предсказуемая возрастающая последовательность такие, что для имеет место разложение Дуба:

Разложение (12) является единственным.

В Теореме 1 мартингал и предсказуемая возрастающая последовательность конструктивно определяются следующим образом:

Предсказуемая возрастающая последовательность носит название *компенсатора* субмартингала.

Пусть – квадратично интегрируемый мартингал (т.е. ). Тогда – является субмартингалом (см. свойство 3), и для него верно разложение Дуба:

где – мартингал, а – предсказуемая возрастающая последовательность, которая в данном конкретном случае носит название *квадратической характеристикой мартингала* («скобки» мартингала). Последовательность описывает изменчивость (волатильность в терминах финансовой математики) мартингала на один шаг вперед при известном текущем состоянии , используя общепринятую характеристику изменчивости – 2-й центральный момент. Действительно, построим , используя формулу (14), точнее ее рекуррентный вариант

Итак, используя мартингал-разность можно получить рекуррентное соотношение для

или явный вид квадратической характеристики:

**Пример 5**. Пусть в условиях Примера 1 . Доказать, что *X* является квадратично интегрируемым мартингалом и найти его квадратическую характеристику.

**Решение:**

В силу независимости верны следующие соотношения: , т.е. мартингал *X* действительно является квадратично интегрируемым. Далее, из (16) и свойств условного математического ожидания следует, что

Обратим внимание, что в данном примере квадратическая характеристика является не просто предсказуемой, но вообще детерминированной последовательностью. В общем случае это не так.

**Пример 6.** Пусть в условиях Примера 5 имеется предсказуемая последовательность , причем Рассмотрим новую последовательность

Доказать, что является квадратично интегрируемым мартингалом и найти его квадратическую характеристику .

(Ответ: )

**Мартингальное представление марковских цепей**

Для начала решим следующий

**Пример 7**. Пусть – марковская цепь с конечным множеством возможных состояний (фазовым пространством) (множество единичных векторов евклидова пространства ), имеющая характеристики : – начальное распределение цепи, – матрица переходных вероятностей на *n*-м шаге. Найти

**Решение:**

Для получения формулы искомого условного среднего воспользуемся марковским свойством цепи, а также свойствами условного математического ожидания (в данном случае относительно дискретной случайной величины, т.е. относительно разбиения):

Следующее утверждение представляет мартингальное разложение марковской цепи.

**Теорема 2.**  – марковская цепь с фазовым пространством и характеристиками ; Тогда цепь представима с помощью следующей рекуррентной схемы

где – мартингал-разность. Соответствующий мартингал является квадратично интегрируемым с квадратической характеристикой

**Доказательство:**

Из (18) следует, что – функция от и , то есть -измеримый случайный вектор. Далее, базируясь на решении Примера 7 и используя (18), вычислим

.

Тем самым мы доказали, что – мартингал-разность. Так как принимает лишь конечное число значений, то обладает тем же свойством, а значит соответствующий мартингал является квадратично интегрируемым. Вычислим его квадратическую характеристики, используя формулы (16) и (17), марковость *X* и свойства условного математического ожидания. При этом следует не забывать, что – векторная последовательность, поэтому его квадратическая характеристика является матричнозначной функцией (подобно тому, как у скалярного случайного процесса может быть скалярная дисперсионная функция, а у векторного процесса – матричнозначная автоковариационная функция). Итак,

Формула (20) и вся теорема 2 доказаны.

**Замечание 4**. Во-первых, разложение (18) показывает, что марковская цепь может быть представлена в виде *линейной* (!) авторегрессии 1-го порядка со специальным (негауссовским) белым шумом в правой части. Во-вторых, в отличие от нелинейной авторегрессии 1-го порядка с гауссовским шумом в правой части (11), которая служит как для моделирования, так и для анализа соответствующего процесса, разложение (18) не служит для моделирования, а лишь для анализа. Оно говорит о том, что разность представляет собой некоторую мартингал-разность – нестационарный дискретный белый шум. Найдем его интенсивность:

В-третьих, рассмотрим линейную нестационарную векторную авторегрессию 1-го порядка:

Введем следующие обозначения:

Из свойств линейных систем известно, что все эти моменты описываются следующими рекурретнтыми соотношениями:

Так как разложение (18) является частным случаем системы (22), то формулы (23) – (25) применимы для определения моментных характеристик и марковской цепи с учетом моментных характеристик начального условия и мартингал-разности .

**Пример 8 (для самостоятельного решения)**. Получить рекуррентные соотношения (26) – (28), исходя из определения и марковского свойства цепи *X*.